

# AS ALTURAS GEOIDAIIS DOPPLER E OS MODELOS DE GRAU ELEVADO DO POTENCIAL GRAVITACIONAL

Recebido para publicação em 26/08/87

**Luiz Paulo Souto Fortes.** Engenheiro Cartógrafo.DGC/IBGE

**Denizar Blitzkow.** Matemático.IAG/USP

**RESUMO.** A redução das observações geodésicas ao elipsóide exige o conhecimento da altura geoidal. Esta pode ser obtida mediante a aplicação da tradicional integral de Stoker ou a combinação de diferentes tipos de dados: altura geoidais Doppler e componentes astrogeodésicos do desvio da vertical. Os modelos do potencial gravitacional têm revolucionado as técnicas de obtenção da altura geoidal. Os atuais modelos atingem o grau e ordem 360 e permitem o cálculo da altura geoidal com uma aproximação que pode ser inferior a 1m. Neste trabalho foi realizado um estudo comparativo de dois modelos de alto grau, OSU86E e OSU86F, com alturas geoidais Doppler. Finalmente é apresentado um mapa geoidal para o Brasil utilizando pontos Doppler e o modelo OSU86E truncado em 180. As alturas geoidais foram referidas ao sistema SAD69 mediante parâmetros de translação recentemente calculados.

**ABSTRACT.** The reduction of geodetic data to ellipsoid needs the knowing of geoid height. It can be obtained using a application of the traditional Stoke's integral or a combination of different types of data: Doppler - derived geoid heights and deviation of the vertical's astrogeodetic components. The gravity potencial models have revolutionized geoid height obtaining techniques. Actual models reach 360 degree and order and allow the computation of geoid height with approximation that may be lower than 1m. This paper addresses a comparative study of two higher degree models, OSU86E and OSU86F, with Doppler geoid heights. Finally, a geoid map for Brazil using Doppler positions and the OSU86E model truncated to 180 is presented. The geoid heights were referred to SAD 69 system using recently computed translation parameters.

## INTRODUÇÃO

O conhecimento da altura geoidal, separação, entre o geóide e o elipsóide ao longo da normal, é de extrema importância nas reduções das observações geodésicas ao elipsóide.

Diversas técnicas têm sido desenvolvidas visando à determinação das alturas geoidais combinando diferentes tipos de dados, tais como: componentes astrogeodésicos do desvio da vertical, alturas geoidais Doppler e as anomalias da gravidade. Os modelos do potencial gravitacional, entretanto, vêm se constituindo numa fonte de informação de capital importância. Com efeito, eles permitem calcular diretamente o componente de longo comprimento de onda da altura geoidal. Esta constitui, em muitos casos, uma razoável aproximação da altura geoidal propriamente dita.

A integração de observações sobre os satélites artificiais com dados terrestres, em particular as anomalias da gravidade, levaram à obtenção de modelos de grau elevado do potencial gravitacional. Assim, podem ser citados: GEM10C (n=180), OSU81 (n=180), GPM2 (n=200), OSU86E e OSU86F (n=360). Resultados do estudo dos três primeiros destes modelos foram apresentados anteriormente (Blitzkow et al., 1983 e Blitzkow, 1986). Neste trabalho são apresentados resultados referentes aos dois últimos modelos.

## ALTURAS ESFEROIDAIS

O fato do potencial perturbador se constituir numa função harmônica fora das massas atrativas e devido à relação:

(1)

$$N = \frac{T}{\gamma}$$

pode-se escrever

(2)

$$N(\phi, \lambda) \cong -R \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (J'_{nm} \frac{c}{\gamma} + K'_{nm} \frac{s}{\gamma})$$

sendo  $\bar{J}'_{nm}$ ,  $\bar{K}'_{nm}$  coeficientes plenamente normalizados vinculados ao potencial perturbador e

(3)

$$\frac{c}{\gamma} = \frac{c}{\gamma} (\cos \phi) \cos m \lambda$$

$$\bar{Y}_{nm}^{-s} = \bar{P}_{nm}^{-} (\cos\phi) \text{ sen } m\lambda$$

funções harmônicas esféricas onde

$\bar{P}_{nm}^{-}$  são as funções associadas de Legendre inteiramente normalizadas.

A (2) pode ser escrita:

(4)

$$N(\phi, \lambda) \cong -R \left\{ \sum_{n=2}^1 \sum_{m=0}^n \bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^{-c} + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^{-s} \right\} - R \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \bar{J}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^{-c} + \bar{K}'_{nm} \bar{Y}_{nm}^{-s} \right\}$$

ou de maneira abreviada:

(5)

$$N(\phi, \lambda) \cong N_1(\phi, \lambda) + \delta N_1(\phi, \lambda)$$

onde a altura geoidal foi dividida em dois componentes espectrais distintos: um de longo comprimento de onda  $N_1$ , e outro de curto comprimento de onda

$\delta N_1$

cujas interpretações podem ser encontradas em (Blitzkow et al., 1983). O componente  $N_1$  calcula-se diretamente a partir de um modelo potencial gravitacional de grau e ordem 1.

Um modo de verificar até que ponto o componente  $N_1$  se aproxima da altura geoidal - o que, por outro lado, significa comprovar até onde o modelo representa o campo gravitacional - é compará-lo com alturas geoidais Doppler. Estas são assim denominadas quando derivadas das observações sobre satélites do sistema TRANSIT. A comparação é feita através das expressões (Lachapelle, 1979):

(6)

$$N = \frac{\sum_{i=1}^n (N_D - N_g)}{n}$$

e

(7)

$$ON = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_D - N_g)^2}{n-1}}$$

A expressão (6) fornece a altura geoidal de ordem zero, sendo  $N_D$  e  $N_g$  as alturas geoidais Doppler e a calculada com o modelo, respectivamente. A expressão (7) retrata estimativa, em termos de diferença padrão, da adequação do modelo ao Doppler, onde

$$N = N_g + N_o$$

Os modelos estudados neste trabalho, OSU86E e OSU86F estão descritos em Rapp and Cruz (1986). Uma cópia dos coeficientes em fita magnética foi gentilmente cedida pelo Dr. R.H. Rapp. Eles foram calculados tomando por base o modelo GEML2 (n=20), acrescentados alguns coeficientes até 30 e mais anomalias médias de blocos de 30' X 30', onde foi possível, ou 1°X1°. A distinção entre os modelos é que no primeiro caso foram utilizados valores observados de anomalias e preditos a partir dos observados. No modelo, em quadrículas vazias, os valores foram preditos introduzindo parâmetros geofísicos. Sobre os oceanos as anomalias médias foram obtidas a partir da altimetria por radar em ambos os modelos.

**EXPERIMENTOS REALIZADOS**

A expectativa é de que os modelos de grau e ordem superiores representem melhor o campo do que aqueles de grau e ordem inferiores. Isto, entretanto, depende da distribuição e da qualidade dos dados existentes. A consequência é que, em algumas regiões, os modelos de grau superior atendem as expectativas e em outras não. Neste trabalho foram realizados experimentos com vários objetivos. Primeiramente verificar quais dos dois modelos (OSU86E e OSU86F) melhor se adapta ao campo gravitacional no Brasil. Em seguida, constatar se os coeficientes de ordem superior melhoram a representação do campo (o que não é esperado no Brasil) e quando não, se eventualmente introduzem possíveis distorções de curto comprimento de onda.

Para tanto foram utilizados 267 observações Doppler sobre a rede de nivelamento. O IBGE colocou à disposição as coordenadas cartesianas X, Y, Z dos pontos, obtidas a partir de observações sobre os satélites do sistema TRANSIT mediante o uso das efemérides precisas (sistema NSWC-9Z2). Previamente foram

aplicadas as seguintes correções às coordenadas cartesianas (Brucher e Altamini, 1985):

$$\begin{aligned} TX &= -0,106\text{m} \\ TY &= +0,697\text{m} \\ TZ &= +4,901\text{m} \\ \alpha_3 &= -0,814'' \\ K &= -0,604\text{ppm} \end{aligned}$$

Utilizaram-se as expressões (6) e (7). Um último objetivo foi o de obter um mapa geoidal referido ao sistema SAD69 combinando o modelo que eventualmente melhor representasse o campo gravitacional com alturas geoidais Doppler. A compatibilização com o SAD69 foi feita através de novos parâmetros de transformação calculados com base em Blitzkow (et al., 1986), porém, com as novas correções ao NSWC-922 mencionadas acima. Obtiveram-se as seguintes translações:

$$\begin{aligned} TX &= 65,55\text{m} \\ TY &= -3,62\text{m} \\ TZ &= 37,57\text{m} \end{aligned}$$

que devem ser aplicadas ao NSWC-922 para transformá-lo em SAD69.

#### RESULTADOS

A tabela 1 mostra os resultados da comparação dos dois modelos com as alturas geoidais Doppler.

Tabela 1. Modelo OSU86 versus Doppler.

MODELO OSU86E			
GRAU	No	(*)	DIF. MAX.
180	-23,62	2,94	-10,4
250	-23,62	2,92	-10,6
360	-24,22	2,93	-10,5

MODELO OSU86F			
GRAU	No	(*)	DIF. MAX.
180	-24,18	3,09	-9,5
250	-23,60	3,07	-9,4
360	-24,18	3,07	-9,3

(\*)  $\sigma$

Foram realizados cálculos truncando os modelos em  $n=180$  e  $n=250$  para comparar com o modelo completo ( $n=360$ ). As colunas 2 e 3 correspondem às fórmulas (6) e (7) respectivamente. A última coluna é a diferença máxima entre a altura geoidal Doppler e a altura esferoidal dada pelo modelo, truncando no grau correspondente. A figura 1 mostra o mapa geoidal obtido, usadas 267 alturas geoidais Doppler e o modelo OSU86E truncado em 180. Foram calculadas as alturas esferoidais com o modelo em intervalos de  $1^\circ \times 1^\circ$  para todo Brasil. Em seguida foi

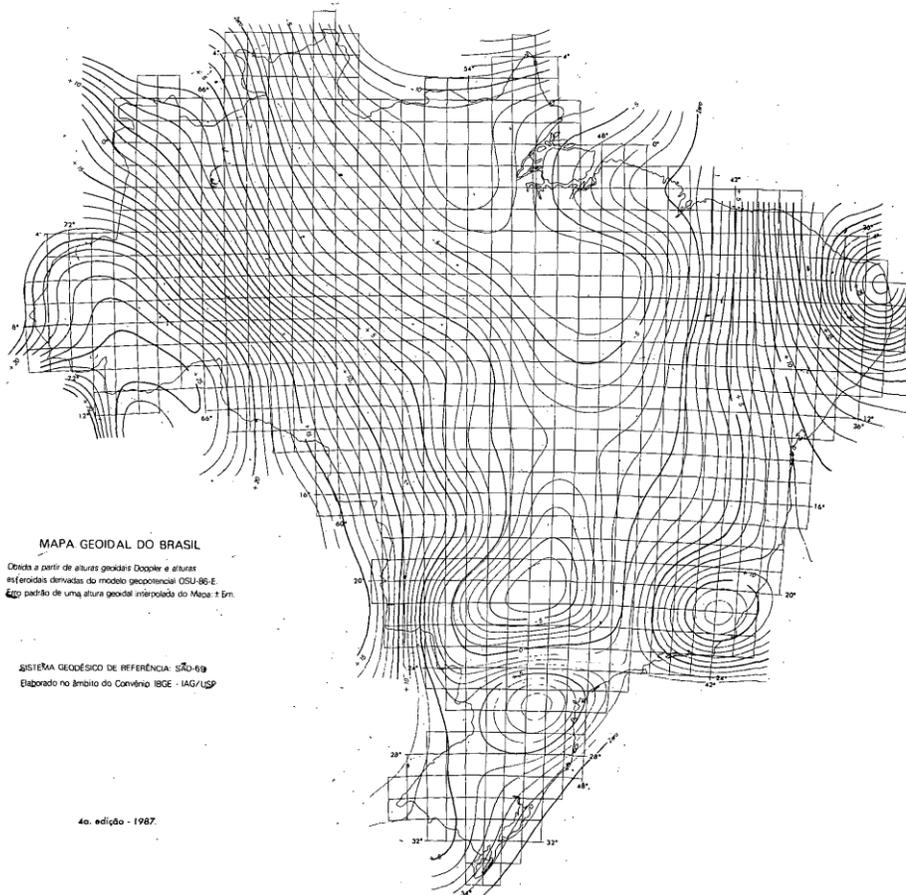
montado um arquivo com os dois tipos de valores, porém, retirando-se as alturas esferoidais nas vizinhanças dos pontos Doppler. As curvas de isovalores foram traçadas pelo IBGE com o programa GPCP-II da CALCOMP. O mapa foi obtido na projeção policônica, com meridiano central de  $54^\circ$ . O programa inicialmente calcula valores em uma malha com um espaçamento definido pelo usuário a partir de certo número, que também é escolhido, de pontos mais próximos. No caso foi definida a malha de 4 cm na escala 1:10.000.000 e quatro pontos para a interpolação.

#### CONCLUSÕES

Em função dos valores da diferença padrão ( $\sigma_N$ ) da tabela 1, conclui-se que o modelo E é levemente melhor que o F. Por outro lado, observa-se que os coeficientes de ordem elevada não contribuem para uma melhor representação do campo. Isto era de se esperar no Brasil, pois, os dados gravimétricos disponíveis não permitem uma resolução de  $30' \times 30'$  ( $n=360$ ) e em muitas regiões nem  $1^\circ \times 1^\circ$  ( $n=180$ ). É importante salientar igualmente que os coeficientes de ordem mais elevada tampouco estão introduzindo distorções, pois a diferença padrão se conserva. Finalmente, é importante falar sobre o erro que se espera para a carta geoidal que é apresentada. Em primeiro lugar, não se conhece o desvio padrão das coordenadas Doppler. A expectativa, considerando tratar-se das efemérides precisas, é que se deve ficar abaixo de 2,5m. A diferença padrão é da ordem de 3m, mas a diferença máxima é de -10m (Tabela 1). Em regiões onde não há Doppler não se pode afirmar nada a respeito da adequação do modelo ao campo. De tal modo que é difícil estimar o erro máximo. Entretanto, verificando a distribuição de frequência (Tabela 2), pode-se esperar que na maior parte do território o erro fique abaixo de 5 m.

Tabela 2. Distribuição de Frequência

No.	VARIAÇÃO DE CLASSE	FREQ
1	-10,593 -9,564	1
2	-9,564 -8,534	0
3	-8,534 -7,504	1
4	-7,504 -6,475	4
5	-6,475 -5,445	3
6	-5,445 -4,415	13
7	-4,415 -3,386	9
8	-3,386 -2,356	17
9	-2,356 -1,326	33
10	-1,326 -0,297	31
11	-0,297 0,733	45
12	0,733 1,763	38
13	1,763 2,792	26
14	2,792 3,822	18
15	3,822 4,852	10
16	4,852 5,881	7
17	5,881 6,911	2
18	6,911 7,941	2
19	7,941 8,970	1
20	8,970 10,000	0



Trabalho apresentado no XIII Congresso Brasileiro de Cartografia, Brasília, 1987.

Agradecimentos ao Dr. R.H. Rapp pela atenção em colocar a disposição uma cópia dos coeficientes dos modelos OSUBSE e OSUBSF. Ao Engenheiro Claudio João B. dos Santos do Departamento de Cartografia do IBGE pelo apoio na obtenção do trapado automatizado do mapa.

**REFERÊNCIAS**

- 1-BLITZKOW, D.; SA, N.C. de; MELLO, M.P. de; PAVAN, A.J. A separação elipsóide-esferóide de referência como aproximação das ondulações geoidais. Rio de Janeiro, XI Congresso Brasileiro de Cartografia, 1983.
- 2-BLITZKOW, D. SA, N.C. de. As alturas geoidais Doppler e a separação elipsóide-esferóide de referência. Revista Brasileira de Geofísica, vol. 2, pp. 19-24, 1983.
- 3-BLITZKOW, D. A combinação de diferentes tipos de dados na determinação das alturas geoidais. Tese de doutoramento apresentada ao Departamento de Geofísica do IAG/USP, 1983.
- 4-BLITZKOW, D., CASTANEDA F, R.M. e ANDRADE, J.B. de. Transformation parameters from NSWC-922 to SAD69 and the geoidal heights. San Francisco. American Geophysical Union, Fall Meeting. Dec. 812, 1986.
- 5-BOCHER, C. and ALTAMIMI, Z. Towards an improved realization of the International Conference on Earth rotation and the terrestrial reference frame. Columbus, Jul. 31-Aug. 2, 1985.
- 6-LACHAPELLE, G. Comparison of Doppler derived and gravimetric geoid undulations in North America. Canada. Collected Papers, Geodetic survey, 77-95, 1979.
- 7-RAPP, R.H. and CRUZ, J.Y. Spherical harmonic expansions of the Earth's gravitational potential to degree 360 using 30 mean anomalies. Dept. of Geodetic Science and Surveying. OSU. Columbus. Report n 376, 1986.

