

AJUSTAMENTO ALTIMÉTRICO SIMULTÂNEO E EM FASES ATRAVÉS DOS MÉTODOS DAS EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO E DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

GILBERTO PESSANHA RIBEIRO

RESUMO

São apresentadas as principais expressões matriciais empregadas no cálculo de ajustamentos, simultâneos e em fases, de redes de nivelamento, através dos métodos das equações de observação e das equações de condição. Este trabalho foi produto de pesquisas de métodos eficientes para o Ajustamento Altimétrico Global Preliminar (A.A.G.P.) da Rede de Nivelamento de Alta Precisão do Sistema Geodésico Brasileiro.

ABSTRACT

The principal matricial formulae used in simultaneous and phased adjustments of levelling networks, through observation equations and condition equations methods, are presented. This paper was necessary in searches of efficient methods to the Preliminar Global Levelling Adjustment of the High Precision Vertical Control Network of the Brazilian Geodetic System.

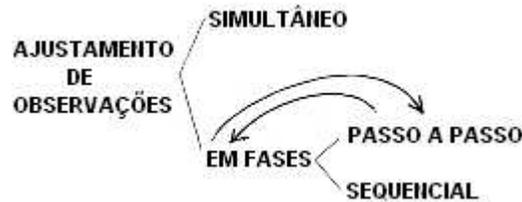
INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar o procedimento do cálculo do ajustamento em fases de uma rede altimétrica de precisão, através do método das equações de observação (método dos parâmetros) e do método das equações de condição (método dos correlatos). São apresentados também os resultados destes ajustamentos obtidos de duas redes de nivelamento de pequeno porte, assim como os resultados destas mesmas redes ajustadas simultaneamente.

O ajustamento de observações pode ser classificado em duas categorias principais, segundo o número de observações envolvidas no cálculo: **ajustamento simultâneo** e **ajustamento passo a passo** (por passos ou por estágios).(7)

No caso do ajustamento de observações provenientes do nivelamento geométrico, onde há um número muito grande de observações, recomenda-se o ajustamento passo a passo. Quando, neste tipo de

ajustamento, há poucos elementos desconhecidos por estágio, trata-se do **ajustamento em fases**, e quando existem poucas observações envolvidas no processamento, trata-se do ajustamento seqüencial. Em resumo, tem-se:



De acordo com J.M. Tienstra no livro “Theory of the Adjustment of Normally Distributed Observations”, o princípio do ajustamento em fases é:

“Any problem of adjustment may be divided into an arbitrary number of phases, provided that, in each following phase, cofactors resulting from preceding phase(s) are used.”(4)

A importância do ajustamento em fases está diretamente associada ao grande número de observações encontradas em redes a serem ajustadas a nível continental. No Brasil, por exemplo, com certeza, é impraticável a aplicação do ajustamento simultâneo de toda a rede altimétrica de precisão, devido às limitações de alocação de memória computacional para tais observações.

Neste trabalho, foram elaborados programas em linguagem FORTRAN IV para o cálculo dos ajustamentos e foram processados no sistema IBM 3081 instalado na Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, na cidade do Rio de Janeiro.

Como ainda não foi feita uma otimização de tais programas, a fim de uma melhor estruturação do fluxo do cálculo, não são apresentadas listagens destes programas neste trabalho.

Além disso, foram consideradas as covariâncias das observações nulas e os pesos das observações inversamente proporcionais às distâncias entre as referências de nível que limitam uma linha de nivelamento.(3)

A variância da unidade de peso a priori foi considerada unitária, isto é: $\sigma_0^2 = 1$

CORREÇÕES A SEREM APLICADAS ÀS OBSERVAÇÕES DE NIVELAMENTO GEOMÉTRICO DE PRECISÃO

Neste trabalho, nos exemplos apresentados, as diferenças de nível (desníveis) “observadas” apresentadas nas tabelas **I** e **II** na verdade são consideradas como produto final de aplicação de algumas correções a priori aos desníveis observados propriamente ditos.(1) Estas correções são:

- a) Correção de refração atmosférica;
- b) Correção astronômica;
- c) Correção ortométrica.

Além destas correções foram também consideradas as seguintes correções instrumentais:

- a) Correção de escala da mira;
- b) Correção de temperatura da mira;
- c) Correção de colimação do nível.

Às diferenças de nível, que são utilizadas no ajustamento das pequenas redes de nivelamento dos exemplos, foram, supostamente, aplicadas as três primeiras correções acima mencionadas a fim de minimizar os efeitos dos erros sistemáticos que ocorrem durante a execução do nivelamento.

A qualidade dos resultados finais de um ajustamento, independente do procedimento (método) adotado, está diretamente relacionada com a qualidade dos dados (diferenças de nível, por exemplo) utilizados no seu cálculo. Desta forma, pode-se afirmar que, se os dados forem tratados com a devida atenção e cautela, no que diz respeito às suas correções, os resultados podem ser obtidos com mais segurança.

AJUSTAMENTO ALTIMÉTRICO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE OBSERVAÇÃO

Ajustamento Simultâneo

a) modelo matemático

O modelo matemático deste método é: $L_a = F(X_a)$

Isto é, equações onde os valores observados ajustados sejam função dos parâmetros ajustados. (5); (2); (10).

b) cálculo

Os valores dos parâmetros ajustados são dados pelo seguinte vetor: $X_a = X_o + X$

onde:

X_o	=	vetor dos valores aproximados dos parâmetros
X	=	vetor das correções aos parâmetros

Os valores observados ajustados são dados pelo vetor:

$$L_a = L_b + V$$

onde:

L_b	=	vetor dos valores observados
V	=	vetor dos resíduos

O modelo matemático linearizado é dado por:

$$L_b + V = F(X_a) = F(X_o + X) = F(X_o) + \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{X_o} X$$

$$L_o = F(X_o)$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Big|_{X_o}$$

$$L_b + V = L_o + AX$$

$$V = L_o - L_b + AX$$

$$L = L_o - L_b$$

$${}_n V_1 = {}_n A_{uu} X_1 + {}_n L_1$$

onde: n = número de equações de observação
 u = número de parâmetros incógnitos

A matriz dos pesos das observações é dada por: $P = \sigma_0^2 \Sigma_{Lb}^{-1}$

onde: σ_0^2 = variância a priori
 Σ_{Lb} = matriz variância-covariância dos valores observados

O vetor das correções aos parâmetros é dado por: $X = - (N)^{-1} U$

onde: $N = A^T P A$
 $U = A^T P L$

Equações normais $N X + U = 0$

A matriz variância-covariância das correções é dada por: $\Sigma_X = \sigma_0^2 N^{-1}$

A matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados é dada por:

$$\hat{\Sigma}_{Xa} = \sigma_0^2 N^{-1}$$

A matriz variância-covariância dos valores observados ajustados é dada por:

$$\hat{\Sigma}_{La} = \sigma_0^2 A N^{-1} A^T$$

A matriz variância-covariância dos resíduos é dada por:

$$\hat{\Sigma}_v = \sigma_0^2 (A N^{-1} A^T - P^{-1})$$

A variância da observação de peso unitário a posteriori é dada por:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T P V}{S}$$

onde: $S = n - u =$ número de graus de liberdade

Ajustamento em Fases

a) conceituação

O problema de observações indiretas pode também ser resolvido pelo ajustamento em fases. As equações de observação são dadas por:

$$V = AX + L \quad \text{com } P' = \text{matriz dos pesos}$$

Então, dividindo o ajustamento em duas fases, as equações tomam o seguinte aspecto:

$$V_1 = A_1 X + L_1 \quad \text{com } P_1 = \text{matriz dos pesos}$$

$$V_2 = A_2 X + L_2 \quad \text{com } P_2 = \text{matriz dos pesos}$$

Onde os subíndices das matrizes indicam a que fase do ajustamento se referem.

Primeira fase do ajustamento

As equações normais, para os dois conjuntos de equações de observação, são as seguintes:

$$N' X + U' = 0 \tag{1}$$

$$(N_1 + N_2) X + (U_1 + U_2) = 0 \quad \text{onde:}$$

$$N_1 = A_1^T P_1 A_1 \quad \text{com } P_1 = N_1$$

$$N_2 = A_2^T P_2 A_2$$

$$U_1 = A_1^T P_1 L_1$$

$$U_2 = A_2^T P_2 L_2$$

Fazendo X_1 ser o vetor dos valores das correções aos parâmetros na primeira fase do ajustamento, logo, a partir da equação (1), têm-se as equações normais para esta fase:

$$N_1 X_1 + U_1 = 0$$

O vetor X_1 explicitado

$$X_1 = -N_1^{-1} U_1$$

A matriz dos pesos dos parâmetros incógnito é dada por: $\Sigma_{x_1} = N_1^{-1}$

O vetor dos valores ajustados dos parâmetros é dado por: $X_{a_1} = X_{0_1} + X_1$

O vetor dos resíduos é dado por: $V_1 = A_1 X_1 + L_1$

O vetor dos valores observados ajustados é dado por: $L_{a_1} = L_b + V_1$

Segunda fase do ajustamento

Para a segunda fase do ajustamento, os valores encontrados (calculados) para os parâmetros incógnitos na primeira fase são utilizados como valores observados, isto é:

$$L_b < = F(X_{a_1})$$

Fazendo X_2 ser o vetor dos valores das correções encontrados na segunda fase, que é o vetor final dos valores das correções no ajustamento, tem-se:

$$X_2 = X_1 + V'_2$$

$$V'_2 = X_2 - X_1$$

$$V'_2 = X_2 + N_1^{-1} U_1$$

As equações de observação para esta fase têm a forma:

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ I \end{bmatrix} X_2 + \begin{bmatrix} L_2 \\ N_1^{-1} U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ V'_2 \end{bmatrix}$$

ou $A' X_2 + L' = V'$

ou ainda $\begin{bmatrix} A_2 X_2 + L_2 = V_2 \\ I X_2 + N_2^{-1} U_1 = V'_2 \end{bmatrix}$

com a seguinte matriz de pesos: $P' = \begin{bmatrix} P_2 & O \\ O & N_1 \end{bmatrix}$ onde: $P_2 = N_2 = \Sigma_{x_2}^{-1}$

As equações normais são equivalentes às apresentadas anteriormente:

$$(N_2 + N_1) X_2 + (U_2 + U_1) = 0$$

A partir do que foi descrito acima, as seguintes conclusões podem ser escritas. Com respeito ao ajustamento em fases de observações indiretas, as equações normais são formadas usando os valores dos parâmetros incógnitos encontrados na primeira fase do ajustamento. Os valores dos pesos obtidos a partir da primeira fase (matriz variância-covariância dos valores dos parâmetros ajustados) são utilizados na segunda fase.

Para se ajustar estas equações de observação, juntamente com as equações de observação do segundo conjunto, os valores dos parâmetros incógnitos encontrados são equivalentes àqueles obtidos quando os dois conjuntos de equações de observação são ajustados simultaneamente.

A matriz dos pesos dos parâmetros incógnitos $P' = \Sigma_X^{-1}$,

depois da segunda fase do ajustamento, equivale àquela obtida através da solução combinada dos dois conjuntos de equações de observação.

O valor mínimo de $V^T P V$ pode ser obtido pela substituição dos valores desconhecidos encontrados através da segunda fase do ajustamento, nas equações de observação V_1 e V_2 , ou pela equação:

$$V^T P V = L_1^T P_1 L_1 + L_2^T P_2 L_2 + U_2^T X_2$$

b) exemplos

São apresentados dois exemplos de redes altimétricas de precisão. O primeiro exemplo (Figura A) tem as seguintes características:

número de equações de observação (n) = 14_
número de parâmetros incógnitos (u) = 6
número de graus de liberdade (n - u) = 8

O segundo exemplo (Figura B) tem as seguintes características:

número de equações de observação (n) = 9_
número de parâmetros incógnitos (u) = 5
número de graus de liberdade (n - u) = 4

Nos anexos deste trabalho, podem ser encontrados os resultados do ajustamento destes exemplos através do método das equações de observação, simultaneamente e em duas fases.

O exemplo da figura A (8) foi dividido em duas partes para o ajustamento em fases. A primeira fase envolve os circuitos (ou linhas) 1, 2, 3 e 4, e a segunda fase os circuitos (ou linhas) 5, 6, 7 e 8. Nota-se que a linha 3 e a linha 8 que formam a linha fechada 9 não foi considerada no ajustamento (Figura A1).

O exemplo da figura B (4) foi dividido em duas partes também. A primeira fase envolve os circuitos 1 e 2, e a segunda fase os circuitos 3 e 4 (Figura B1).

Vale lembrar que o número de circuitos (ou linhas) identificados nos “croquis”, independentes entre si, está relacionado ao número de referências de nível fixas (injunções) consideradas no ajustamento.

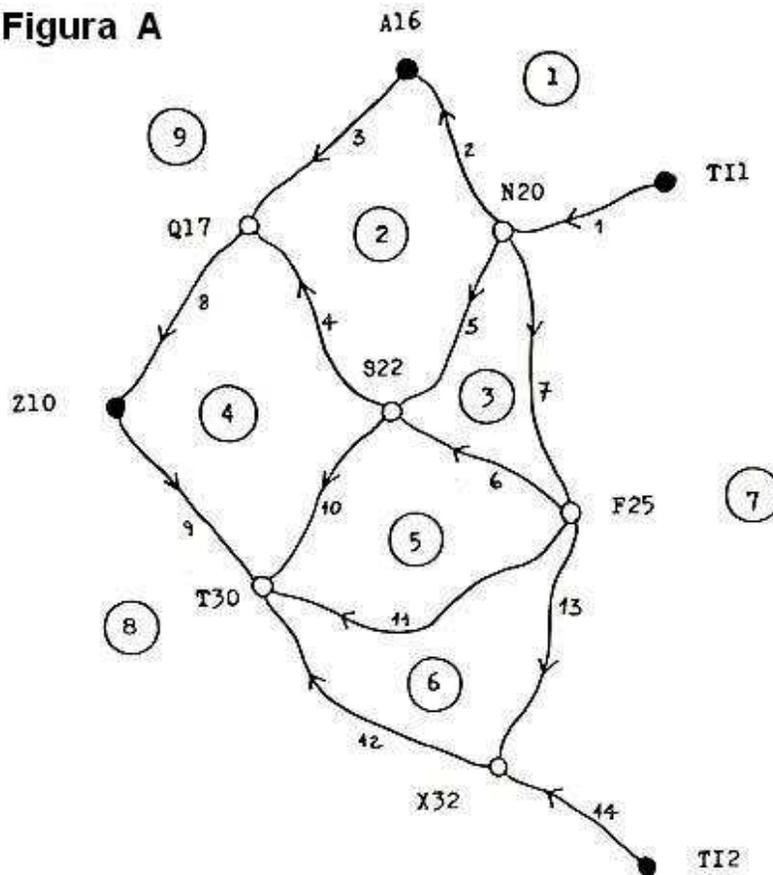
Nas tabelas I e II são apresentados os valores observados das diferenças de nível respectivamente dos exemplos A e B.

Nas tabelas III e IV são apresentados os valores ajustados das diferenças de nível assim como os resíduos encontrados após o ajustamento.

Nas tabelas V e VI são apresentados os valores das altitudes fixas e das altitudes ajustadas após o ajustamento.

Observou-se que os resultados dos ajustamentos segundo o método das equações de observação e o método das equações de condição foram idênticos.

Figura A

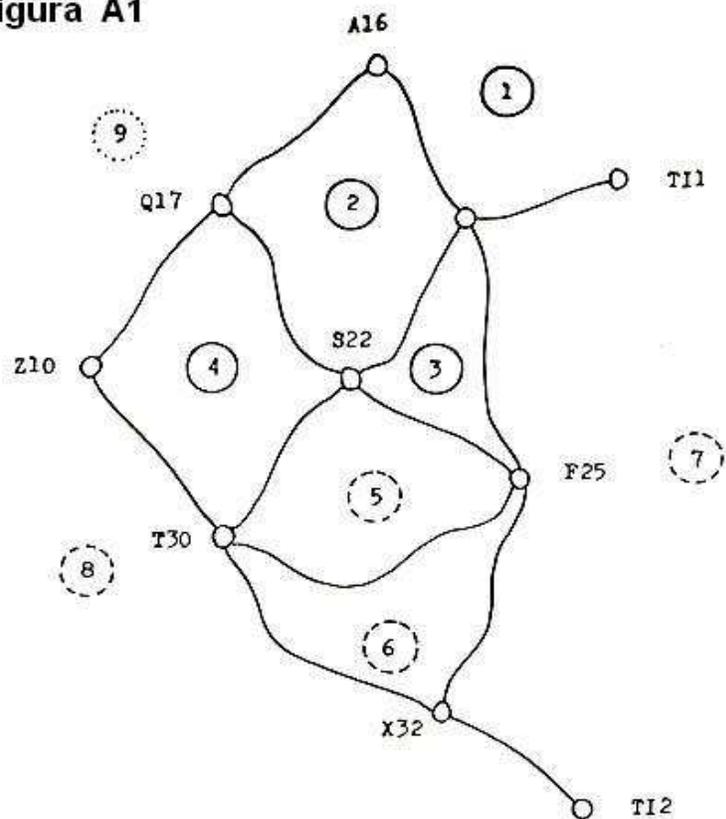


Legenda:

- Referência de nível com altitude fixa
- Referência de nível com altitude desconhecida

Observação: As setas indicam o sentido em que o terreno se eleva.

Figura A1



Legenda:

- Circuito ou linha fechada da primeira fase
- ⊖ Circuito ou linha fechada da segunda fase
- ⊙ Linha fechada não considerada no ajustamento

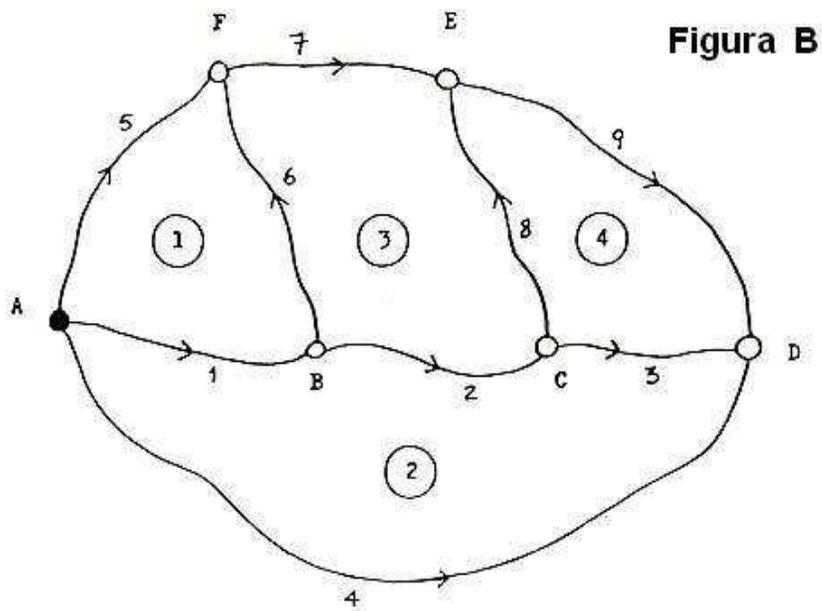


Figura B

Legenda:

- Referência de nível com altitude fixa
- Referência de nível com altitude desconhecida

Observação: As setas indicam o sentido pelo qual foi feito o nivelamento.

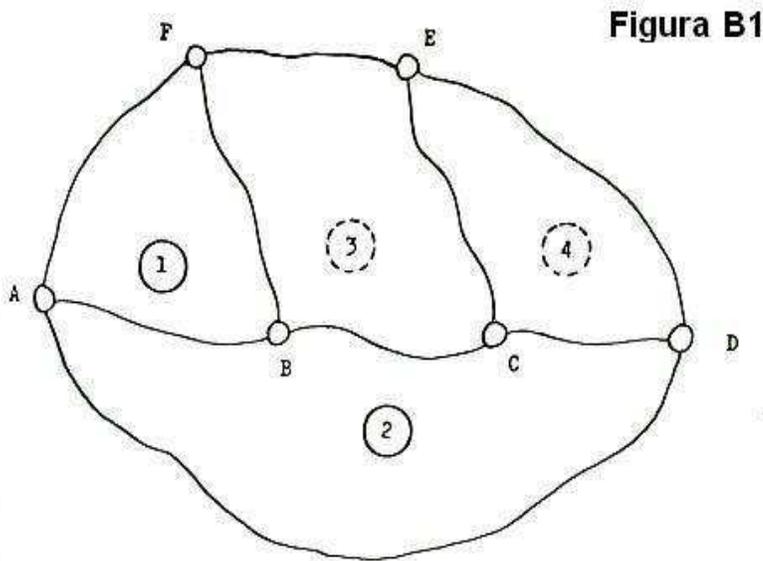


Figura B1

Legenda:

- Circuito da primeira fase
- ⊖ Circuito da segunda fase

Tabela I

LINHA	REFERÊNCIA DE NÍVEL		DIFERENÇA DE NÍVEL OBSERVADA (m)	DISTÂNCIA (km)
	DE	PARA		
1	T11	N20	12,3434	20,00
2	N20	A16	10,0410	25,00
3	A16	Q17	15,9121	31,00
4	S22	Q17	3,8128	28,00
5	N20	S22	22,1284	37,00
6	F25	S22	10,3317	32,00
7	N20	F25	11,8103	41,00
8	Q17	Z10	17,4588	37,00
9	Z10	T30	2,8147	39,00
10	S22	T30	24,0654	41,00
11	F25	T30	34,4186	52,00
12	X32	T30	15,4827	48,00
13	F25	X32	18,9476	45,00
14	T12	X32	42,3215	17,00
			TOTAL	493,00

Tabela II

LINHA	REFERÊNCIA DE NÍVEL		DIFERENÇA DE NÍVEL OBSERVADA (m)	DISTÂNCIA (km)
	DE	PARA		
1	A	B	124,632	125,94
2	B	C	217,168	74,08
3	C	D	-92,791	103,71
4	A	D	248,754	316,69
5	A	F	-11,418	140,75
6	B	F	-135,876	77,78
7	F	E	-161,107	194,46
8	C	E	-513,895	122,23
9	E	D	421,234	148,16
			TOTAL	1303,80

Tabela III

LINHA	REFERÊNCIA DE NÍVEL		DIFERENÇA DE NÍVEL AJUSTADA (m)	RESÍDUO (m)
	DE	PARA		
1	TI1	N20	12,3500	0,0066
2	N20	A16	10,0433	0,0023
3	A16	Q17	15,9081	-0,0040
4	S22	Q17	3,8114	-0,0014
5	N20	S22	22,1399	0,0115
6	F25	S22	10,3324	0,0007
7	N20	F25	11,8075	-0,0028
8	Q17	Z10	17,4521	-0,0067
9	Z10	T30	2,8175	0,0028
10	S22	T30	24,0811	0,0157
11	F25	T30	34,4135	-0,0051
12	X32	T30	15,4655	-0,0172
13	F25	X32	18,9479	0,0003
14	T12	X32	42,3153	-0,0062
SOMATÓRIO DOS QUADRADOS DOS RESÍDUOS				0,0000

Tabela IV

LINHA	REFERÊNCIA DE NÍVEL		DIFERENÇA DE NÍVEL AJUSTADA (m)	RESÍDUO (m)
	DE	PARA		
1	A	B	124,5307	-0,1013
2	B	C	217,1082	-0,0598
3	C	D	-92,7941	-0,0031
4	A	D	248,8448	0,0908
5	A	F	-11,3451	0,0729
6	B	F	-135,8758	0,0002
7	F	E	-161,0059	0,1011
8	C	E	-513,9900	-0,0950
9	E	D	421,1959	-0,0381
SOMATÓRIO DOS QUADRADOS DOS RESÍDUOS				0,0003

Tabela V

REFERÊNCIA DE NÍVEL	ALTITUDE FIXA (m)	ALTITUDE AJUSTADA (m)
TH	1,3752	-
A16	23,7685	-
N20	-	13,7252
Q17	-	39,6766
S22	-	38,8652
Z10	57,1287	-
F25	-	25,5327
T30	-	59,9462
X32	-	44,4807
TI2	2,1654	-

Tabela VI

REFERÊNCIA DE NÍVEL	ALTITUDE FIXA (m)	ALTITUDE AJUSTADA (m)
A	1679,4320	-
B	-	1803,9627
C	-	2021,0709
D	-	1928,2768
E	-	1507,0809
F	-	1668,0869

AJUSTAMENTO ALTIMÉTRICO ATRAVÉS DO MÉTODO DAS EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO

Ajustamento Simultâneo

a) modelo matemático

O modelo matemático deste método é: $F(L_a) = 0$

Isto é, equações onde há funções nulas que envolvem os valores observados ajustados. (2); (5); (10).

No caso do nivelamento geométrico ao longo de linhas formando um circuito fechado, por exemplo, a soma algébrica de todas as diferenças de nível deveria ser nula, mas isto, na prática, não acontece devido aos erros de fechamento do próprio circuito.

b) cálculo

Os valores das observações ajustadas são dados por: $L_a = L_b + V$

O modelo matemático linearizado é dado por:

$$\mathbf{F}(\mathbf{L}_a) = \mathbf{F}(\mathbf{L}_b + \mathbf{V}) \cong \mathbf{F}(\mathbf{L}_b) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}_a} \right|_{\mathbf{L}_b} (\mathbf{L}_a - \mathbf{L}_b) = 0$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{L}_b) + \mathbf{W}$$

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{L}_a} \right|_{\mathbf{L}_b}$$

$$\mathbf{B}_m \mathbf{V}_1 + \mathbf{r} \mathbf{W}_1 = \mathbf{0}_1 \quad \text{onde:}$$

r = número de equações de condição

n = número de incógnitas

A matriz dos pesos das observações é dada por: $\mathbf{P} = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1}$

onde: σ_0^2 = variância a priori

Σ_{L_b} = matriz variância-covariância dos valores observados

O vetor dos resíduos $\mathbf{V} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}$

onde: $\mathbf{K} = -(\mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{W}$

A matriz variância-covariância dos valores ajustados é dada por:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 \left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \right]$$

ou ainda por:

$$\Sigma_{L_a} = \sigma_0^2 \left[\mathbf{I} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} \right] \mathbf{P}^{-1}$$

onde:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}^T$$

σ_0^2 = variância a priori

\mathbf{I} = matriz identidade de ordem n

\mathbf{P} = matriz dos pesos das observações

A matriz variância-covariância dos resíduos é dada por:

$$\Sigma_V = \sigma_0^2 P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1}$$

A matriz variância- covariância dos valores observados:

$$\Sigma_{L_b} = \Sigma_{L_a} + \Sigma_V$$

A variância da observação de peso unitário a posteriori é dada por:

$$\sigma_0^2 = \frac{V^T P V}{r} \quad \text{onde:}$$

$$V^T P V = K^T W$$

Ajustamento em Fases

a) conceituação

O princípio apresentado na introdução deste trabalho pode ser aplicado ao ajustamento em fases através das observações condicionadas, assim como através das observações indiretas.

Assim, nas equações de condição: $B V + W = 0$

Os pesos das observações são apresentados por uma matriz diagonal P onde as covariâncias entre as observações são consideradas nulas.

Para este tipo de ajustamento, considerando duas fases assim como o caso anterior, as equações de condição de cada fase são:

$$B_1 V + W_1 = 0 \tag{2}$$

$$B_2 V + W_2 = 0 \tag{3}$$

Onde os subíndices das matrizes indicam a que fase do ajustamento se referem.

O vetor dos resíduos é o seguinte:

$$V = V_1 + V_2 \tag{4}$$

Primeira fase do ajustamento

Seja V_1 o vetor dos resíduos obtidos através da primeira fase, usando o primeiro conjunto de equação de condição. Logo, a equação (2) toma a forma:

$$B_1 V_1 + W_1 = 0$$

Com o mesmo procedimento do ajustamento simultâneo, tem-se:

$$V_1 = P^{-1} B_1^T K_1$$

onde:

$$K_1 = -N_1^{-1} W_1$$

$$N_1 = B_1 P^{-1} B^T$$

As equações normais desta fase têm a forma:

$$B_1 P^{-1} B^T K_1 + W_1 = 0$$

$$N_1 K_1 + W_1 = 0^{-1} B^T$$

A matriz dos pesos para os correlatos é a inversa da matriz N_1 , isto é:

$$\Sigma_{C_1} = N_1^{-1}$$

A matriz dos pesos dos resíduos é dada por:

$$\Sigma_{V_1} = P^{-1} B_1^T N_1^{-1} B_1 P^{-1}$$

A matriz dos pesos dos valores observados é então:

$$\Sigma_{L_{a_1}} = P^{-1} - \Sigma_{V_1}$$

$$\Sigma_{L_{a_1}} = (I - P^{-1} B_1^T N_1^{-1} B) P^{-1}$$

Para esta primeira fase os valores ajustados são dados por:

$$L^{a_1} = L_b + V_1$$

Segunda fase do ajustamento

O princípio básico para o ajustamento em fases é a aplicação da matriz variância-covariância dos valores observados ajustados da primeira fase ($\Sigma_{L_{a_1}}$) no cálculo da segunda fase.

Desta for, então:

$$N_2 = B_2 \Sigma_{L_{a_1}} B_2^T; P_2 = \Sigma_{L_{a_1}}$$

Sejam V_2 e K_2 os vetores dos resíduos e dos correlatos obtidos através da segunda fase.

Logo, o vetor dos correlatos é dado por:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K'_2 \\ K''_2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K'_2 \\ K''_2 \end{bmatrix}$$

A equação (4) nas equações (2) e (3) dão como resultado:

$$\begin{bmatrix} B_1(V_1 + V_2) + W_1 = 0 \\ B_2(V_1 + V_2) + W_2 = 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} B_1V_1 + B_1V_2 + W_1 = 0 \\ B_2V_1 + B_2V_2 + W_2 = 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Substituindo V, como obtido através da primeira fase do ajustamento, nas equações (5) e (6), tem-se:

$$(B_1V_1 + W_1) + B_1V_2 = 0$$

como $B_1V_1 + W_1 = 0$, logo:

$$B_1V_2 = 0 \quad (7)$$

$$B_2V_2 + (W_2 + B_2V_1) = 0$$

Fazendo $B_2V_1 + W_2 = W'_2$, tem-se:

$$B_2V_2 + W'_2 = 0 \quad (8)$$

Usando o método dos mínimos quadrados, tem-se, a partir de (7) e (8) as seguintes equações correlatas.

$$V_2 = P^{-1} B_1^T K'_2 + P^{-1} B_2^T K''_2 \quad (9)$$

e as equações normais

$$N_1 K'_2 + B_1 P^{-1} B_2^T K''_2 = 0$$

Fazendo algumas transformações tem-se:

$$K'_2 = N_1^{-1} B_1 P^{-1} B_2^T K''_2 \quad (10)$$

$$K''_2 = -N_2^{-1} W'_2$$

Substituindo a equação (10) na equação (9), tem-se:

$$V_2 = \Sigma_{L_{a_1}} B_2^T K''_2 \quad (11)$$

As equações normais para a segunda fase são dadas por:

$$B_2 \Sigma_{L_{a_1}} B_2^T K''_2 + K'_2 = 0 \quad (12)$$

As equações (11) e (12) são, respectivamente, as equações correlatas e as normais que satisfazem as equações de condição para a segunda fase do ajustamento. Em outras palavras, as equações (7) e (8) são formadas usando os valores ajustados obtidos através da primeira fase do ajustamento como as quantidades observadas, e os pesos das quantidade ajustadas $\Sigma_{L_{a_1}}$ são usados como pesos das quantidades observadas na segunda fase do ajustamento para formar as equações normais e as equações correlatas. Então, os resíduos obtidos a partir da segunda fase do ajustamento (V_2) mais os resíduos obtidos através da primeira fase do ajustamento (V_1) serão iguais àqueles obtidos através do ajustamento simultâneo.

O valor mínimo de $V^T P V$ pode ser obtido separadamente para cada fase:

$$V_1^T P V_1 = -K_1^T W_1 = K_1^T N_1^{-1} K_1 \quad (13)$$

$$V_2^T P V_2 = -K_2^T W_2 = K_2^T N_2^{-1} K_2 \quad (14)$$

O valor final do somatório dos quadrados dos resíduos é dado pela adição das equações (13) e (14):

$$V^T P V = K_1^T N_1^{-1} K_1 + K_2^T N_2^{-1} K_2$$

b) Exemplos

Os mesmos exemplos apresentados no item “Ajustamento em Fases – Exemplos” foram utilizados para o ajustamento pelo método das equações de condição. O exemplo da figura A tem as seguintes características:

número de equações de condição (r) = 8

número de graus de liberdade (r) = 8

número de incógnitas = 14

O exemplo da figura B tem as seguintes características:

número de equações de condição (r) = 4

número de graus de liberdade (r) = 4

número de incógnitas = 9

Nas tabelas deste trabalho, são encontrados os resultados do ajustamento destes exemplos através do método das equações de condição, simultaneamente e em duas fases.

Para o ajustamento em fases, a rede foi dividida da mesma forma que no caso anterior para os dois exemplos.

As altitudes ajustadas e os resíduos apresentados nas tabelas são os mesmos obtidos, quando aplicado o outro método de ajustamento nas redes altimétricas.

CONCLUSÕES

Através dos dois casos analisados de redes altimétricas de precisão, vê-se a grande aplicabilidade do ajustamento em fases. Quando se trata de redes de grande porte, com um número grande de observações, aconselha-se este procedimento no cálculo do ajustamento.

A adoção do método de ajustamento (paramétrico ou dos correlatos) está associado ao armazenamento, na memória do computador, das variáveis (matrizes e vetores). Notou-se que, utilizando o método dos parâmetros, foi necessário inverter uma matriz de ordem 6, enquanto que, utilizando o outro método (dos correlatos), a matriz a ser invertida é de ordem 8. Este pode ser um ponto a favor do método dos parâmetros, no caso do ajustamento simultâneo, para o exemplo da figura A. Já no outro exemplo, foi preciso inverter uma matriz de ordem 5, utilizando o método dos parâmetros, enquanto que, utilizando o outro método, a matriz a ser invertida foi de ordem 4, no ajustamento simultâneo.

A viabilidade do emprego do ajustamento em fases, relativa a redes altimétricas de precisão, pode ser encontrada, por exemplo, no ajustamento da Rede de Nivelamento Australiana (9).

Naquele país, houve uma divisão da rede em cinco partes, gerando, então, cinco fases de ajustamento.

No caso do nosso país, mesmo tratando-se de uma área maior que a da Austrália, é possível a adoção de uma metodologia para um ajustamento altimétrico em fases. Deve-se, portanto, dar atenção especial à propagação de erros ao longo dos circuitos e linhas a serem inseridos no ajustamento.

Sabe-se, portanto, que o ajustamento de redes de nivelamento e o ajustamento de redes gravimétricas trabalham com modelos matemáticos lineares, logo quando adota-se o método das equações de observação no processo do ajustamento, o cálculo deve ser não iterativo, isto é, o cálculo deve se processar diretamente. As expressões, para este caso, para obter as observações ajustadas (desníveis) e parâmetros, também ajustados (altitudes) são, respectivamente:

$$L_a = V + AX_a + C$$

$$X_a = - (A^T P A)^{-1} A^T P (C - L_b)$$

onde C é o vetor constante contendo valores de altitudes fixas para o ajustamento.

REFERÊNCIAS

- 1 – BALAZS, E.I. & YOUNG, G. M. **Corrections applied by the National Geodetic Survey to precise levelling observations.** Rockville, Md. United States Department of Commerce, June, 1982. 12p.
- 2 – BJERHAMMAR, A. **Theory of errors and generalized matrix inverses.** Stockholm, Sweden. Elsevier Scientific Publishing Company, 1973. 420p.
- 3 – BRAATEN; DORE; KUKKAMAKI; RUNE & VIGNAL. Note on the evaluation of the precision of levelling. **Bulletin Géodésique.** (18):521-548, Aug., 1948.
- 4 – CHUNG-CHI, Y. On phased adjustment. **Survey Review.** ():282-.
- 5 – GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações; aplicações geodésicas.** Curitiba, UFPR, 1984. P.irr. Apostila.
- 6 – -----. **Aplicações do cálculo matricial em Geodésia.** Curitiba, UFPR, p.irr. Apostila.
- 7 – MENEZES, . **Cálculo das compensações.** Notas de aulas. Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro, 1982.
- 8 – RAPPLEYE, H.S. **Manual of levelling computation and adjustment.** Washington, D.C. United States Government Printing Office, 1948. 178p.
- 9 – ROELSE, A.; GRANGER, H.W. & GRAHAM, J.W. **The adjustment of the Australian Levelling Survey.** 2.ed. Canberra, Australia. s.ed. Mar., 1975. p.irr.
- 10 – VANÍCEK, P. & KRAKIWSKY, E.J. **Geodesy: the concepts.** 2.ed. Amsterdam, North-Holland. Elsevier Science Publishers B.V., 1986. I 697 p.