Altitudes e o Problema do Valor de Contorno da Geodésia (PVCG): uma revisão conceitual

Denizar Blitzkow

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Caixa postal 61548
05424-970 São Paulo - SP - Brasil

E-mail: dblitzko@usp.br

Novembro/2007
Rio de Janeiro - Brasil

Problema da altitude

- Determinação da altitude ortométrica: Problema clássico que demanda uma única superfície equipotential do campo de gravidade como referência.

- Applicações: Geodésia, Engenharia, Cartografia, Geofísica, Prospecção mineral, etc.

Problema da altitude

Superfície de Equipotencial

Nível médio do mar? Geóide?

O nível médio do mar materializa diferentes *superfícies equipotenciais* em diferentes pontos. A separação entre o nível médio do mar e o geóide define o que se chama Topografia da Superfície Oceânica (TSO), difícil de modelar.

O nível médio do mar foi aceito e usado no passado como uma materialização do geóide **considerado estável no tempo - não mais aceito**.

Problema da altitude

Devido ao distúrbio do efeito estufa, a temperatura da Terra vem aumentando. O gelo das altas montanhas e das calotas polares estão derretendo resultando numa redistribuição das massas de água; há também uma expansão térmica dos oceanos. A conseqüência destes e de outros efeitos é a **variação do nível médio do mar com o tempo**.

Superfície Equipotencial do Campo de Gravidade da Terra

- O objetivo principal da geodésia física é a determinação do geóide e do campo de gravidade externo a ele. **Os problemas de valor de contorno da geodésia** (PVCG) lidam com a determinação do potencial de gravidade na superfície da Terra e externo à ela através de dados terrestres de gravidade.

Problema de valor de contorno

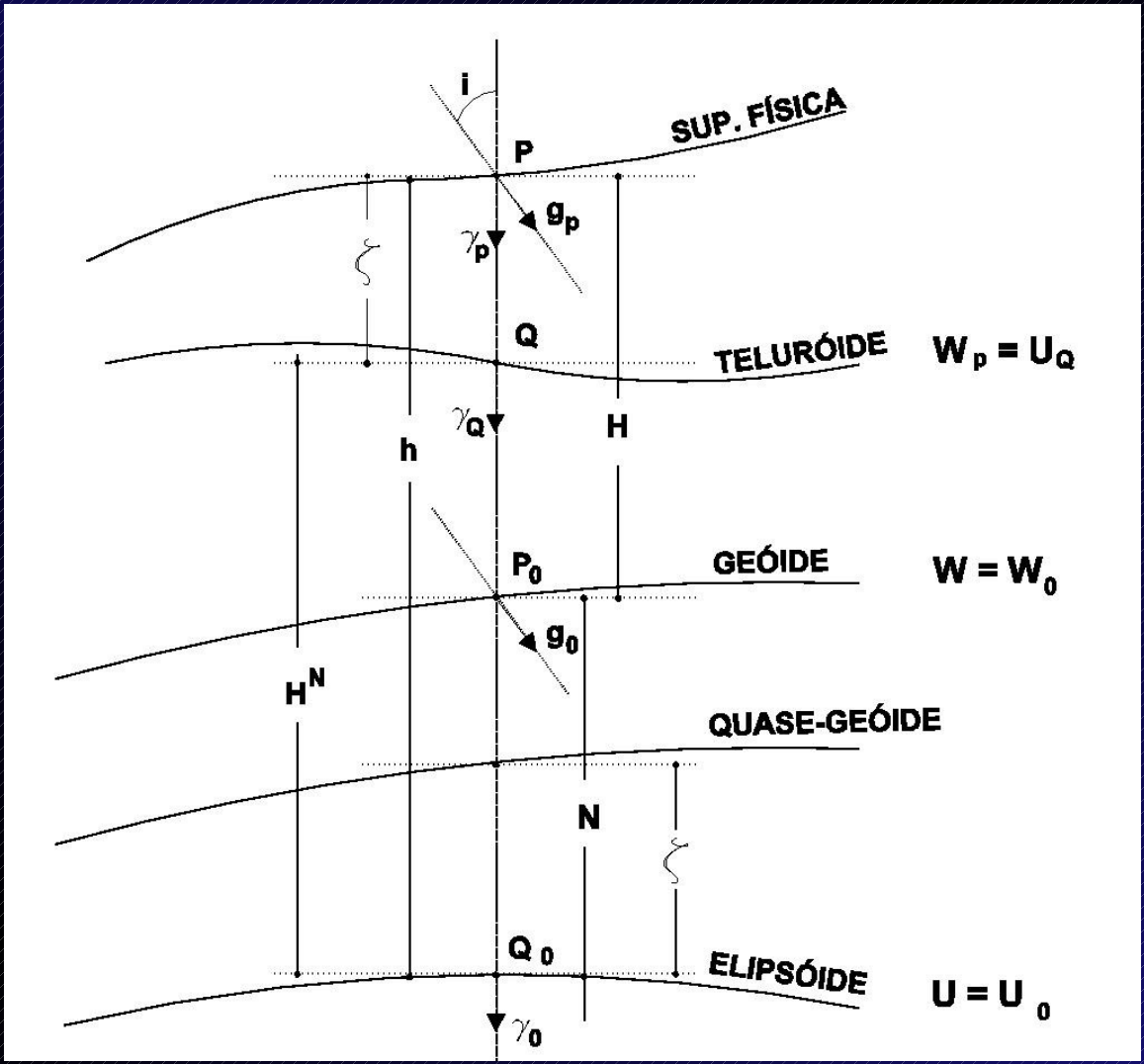
A teoria do potencial apresenta três problemas de valor de contorno:

- **Problema de Dirichlet**: Calcular uma função harmônica (dentro ou fora de S) a partir de valores da função sobre S.
- **Problema de Newmann**: Calcular uma função harmônica (dentro ou fora de S) a partir de valores da derivada normal da função sobre S.
- **Problema de Hilbert:** Calcular uma função harmônica (dentro ou fora de S) a partir da combinação linear da função e sua derivada normal sobre S.

Problema de valor de contorno da Geodésia

- O problema de valor de contorno da Geodésia (PVCG) é similar ao problema de Hilbert, com a diferença de que a superfície é desconhecida. A seleção de S permitirá o estabelecimento do PVCG.
- Quando for selecionado o geóide, tem-se o problema de Stokes; no caso de selecionar a superfície física da Terra, tem-se o problema de Molodenskii, resultando no chamado quase-geóide.

Elementos do geóide e do quase-geóide



Elementos do geóide e do quase-geóide

- h - altitude geométrica
- H - altitude ortométrica
- N - altura geoidal
- H^N – altitude normal

$\forall\ \zeta$ - anomalia de altura

A aceleração da gravidade, observada sobre a superfície da Terra, não pode ser reduzida ao geóide, o que é necessário, devido ao não conhecimento da distribuição de densidade no interior da crosta. Assim, usa-se o gradiente da Terra normal ao invés do real.

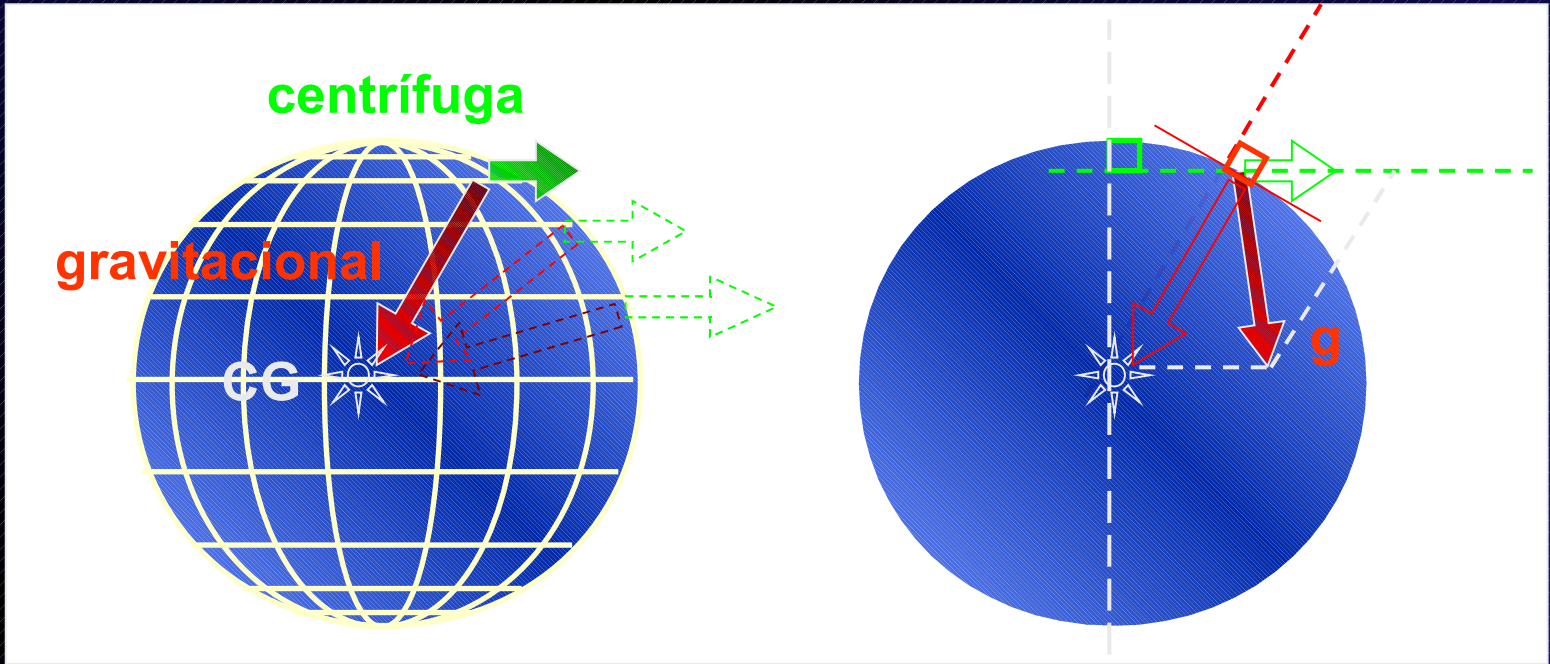
Elementos do geóide e do quase-geóide

O problema com a aproximação de Molodenskii é que o quase-geóide e o teluróide não são superfícies equipotenciais do campo de gravidade. Assim, elas têm restrições para uso na engenharia, em particular, em aplicações que envolvem água.

É importante observar que nos oceanos o geóide e o quase-geóide são coincidentes.

Força da Gravidade e Força Gravitacional (ou de Atração)

- Um corpo em repouso na superfície da Terra está sujeito a duas forças: gravitacional (ou de atração) e centrífuga. A resultante é chamada força de gravidade.



Força da Gravidade e Força Gravitacional (ou de Atração)

- Ao conjunto de pontos do espaço sujeito à força de gravidade dá-se o nome de campo de gravidade.
- A força não é uma grandeza facilmente mensurável. Mede-se mais facilmente a aceleração da gravidade usando um gravímetro de mola (relativo) ou absoluto.

Força da Gravidade e Força Gravitacional (ou de Atração)

- As medições da aceleração da gravidade, gravimetria, constituem uma das informações que permitem definir o campo de gravidade e com isso a forma da Terra através do cálculo das alturas geoidais. Estas são obtidas através da fórmula de Stokes.

$$N = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma$$

- Define-se potencial gravitacional através da expressão:

$$V = KM / \ell$$

K = constante universal da gravitação

M = massa (da Terra)

ℓ = distância ao centro de massa

No sistema WGS-84 o produto KM vale:

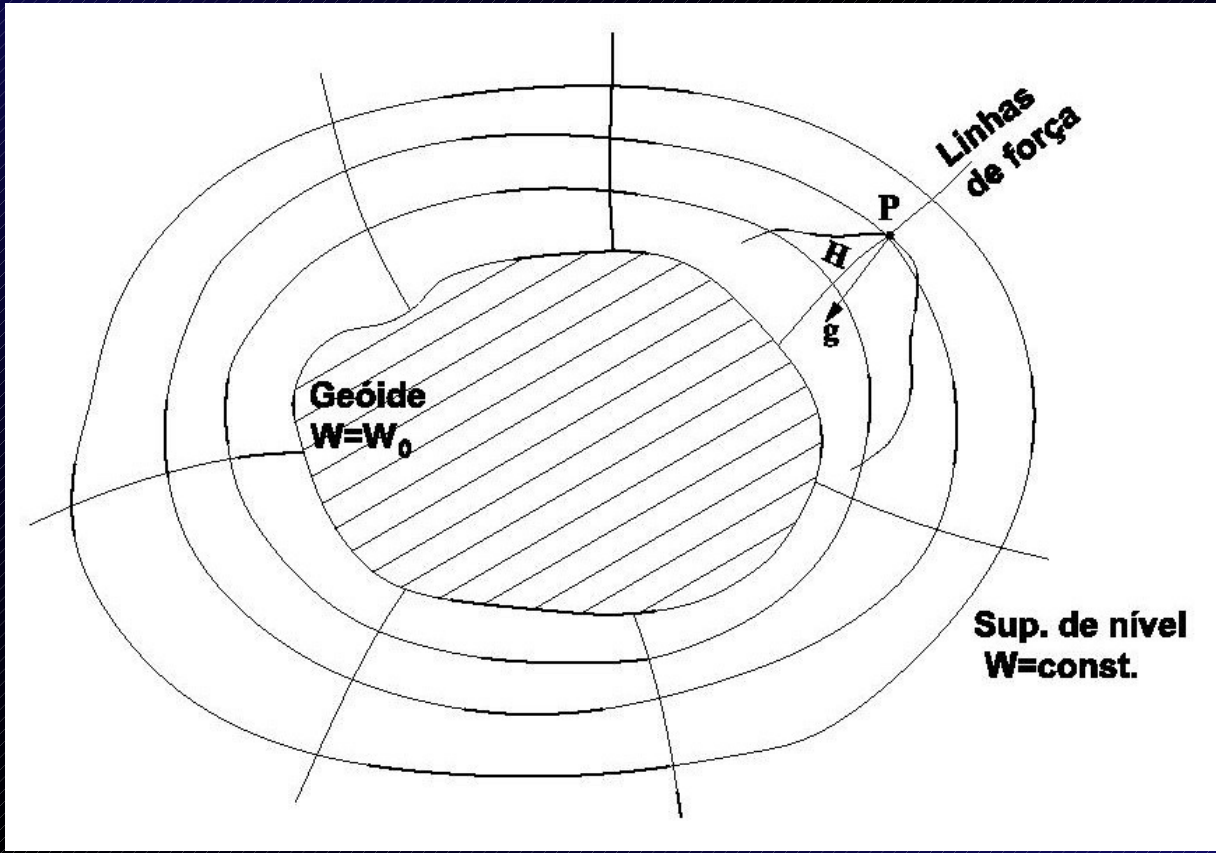
$(3986004{,}418 \pm 0{,}008) \times 10^8 m^3/s^2$

- O potencial de gravidade (W) é igual à soma do potencial gravitacional (V) com o potencial centrífugo (Φ).

$$W = V + \Phi$$

- Por qualquer ponto do espaço passa uma superfície cujo potencial de gravidade da Terra real é constante em todos os seus pontos. Trata-se de uma superfície equipotencial ou superfície de nível.

Superfícies Equipotenciais



Superfície Geoidal

A superfície equipotencial do campo de gravidade da Terra real, com potencial Wo, que coincide com o nível médio não perturbado dos mares é chamada superfície GEOIDAL. Ela limita uma distribuição de massa chamada GEÓIDE que é adotada como forma da Terra real. No sistema WGS-84:

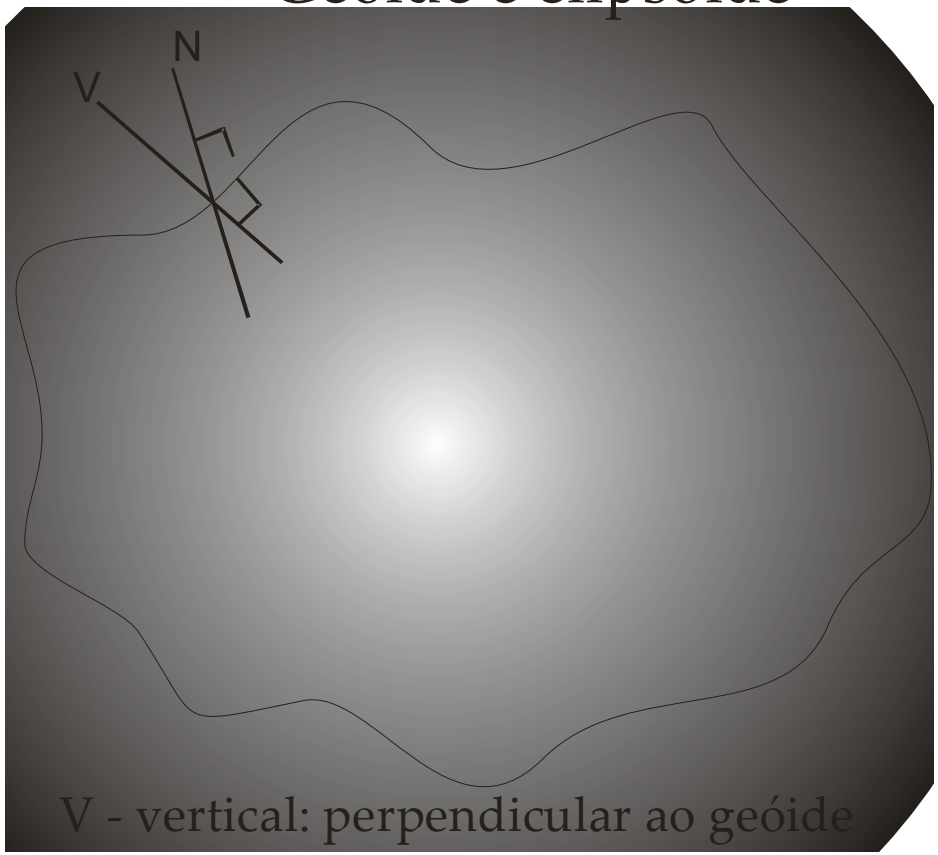
$Wo = 62.636.860,8497 m^2/s^2$

- Chama-se Terra normal a um elipsóide de revolução com a mesma massa (M) da Terra real, a mesma velocidade angular (ω) e cujo potencial de gravidade normal (U_o) sobre sua superfície é igual ao potencial de gravidade (W_o) sobre o Geóide.

- A Terra real não tem uma forma regular, pois não tem uma distribuição homogênea de massa. A principal irregularidade é o achatamento. Em seguida vêm as demais "pequenas" irregularidades (alturas geoidais).

A Terra real e a Terra normal

Geóide e elipsóide



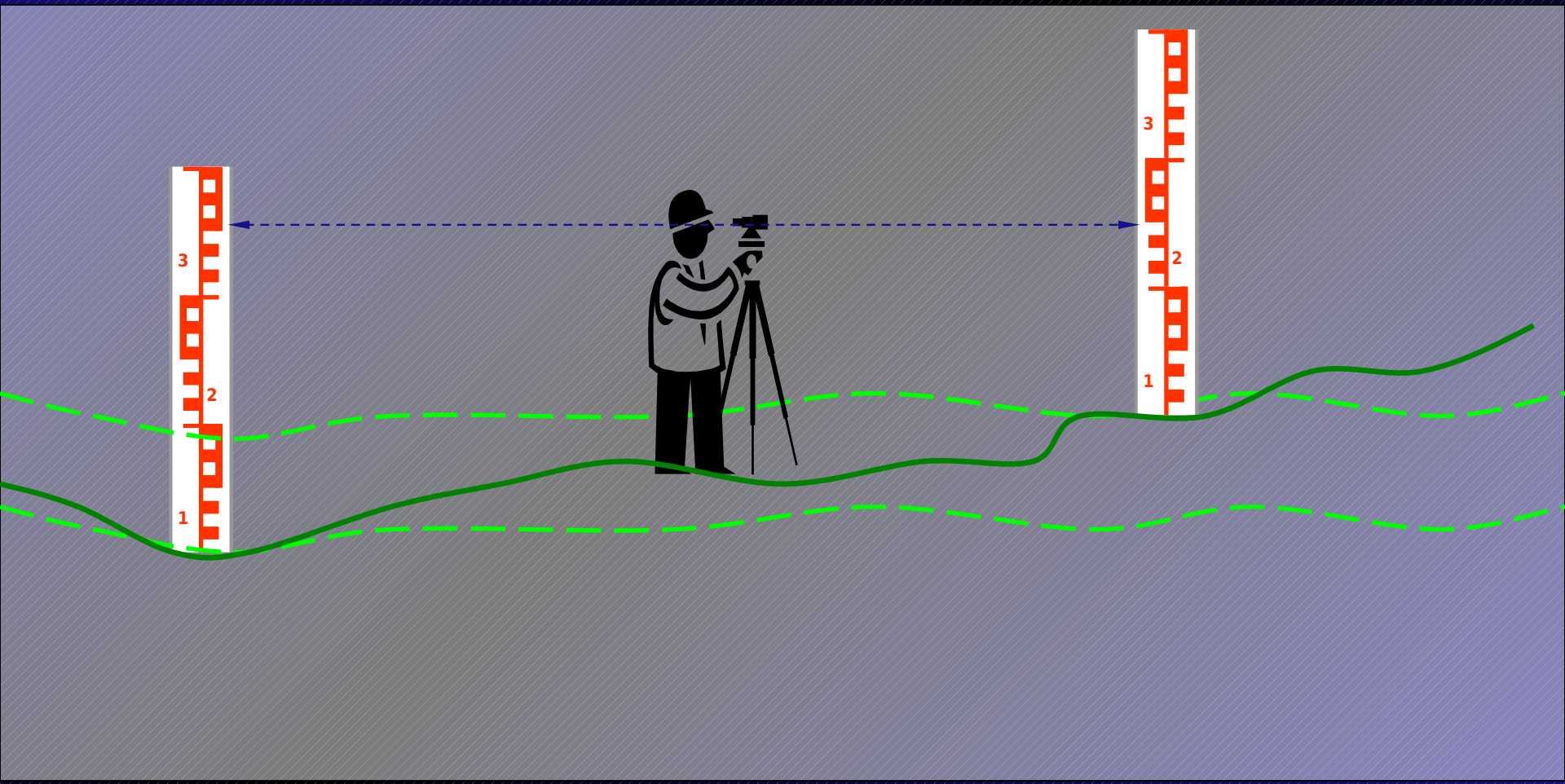
N - normal : perpendicular ao elipsóide

Nivelamento geométrico

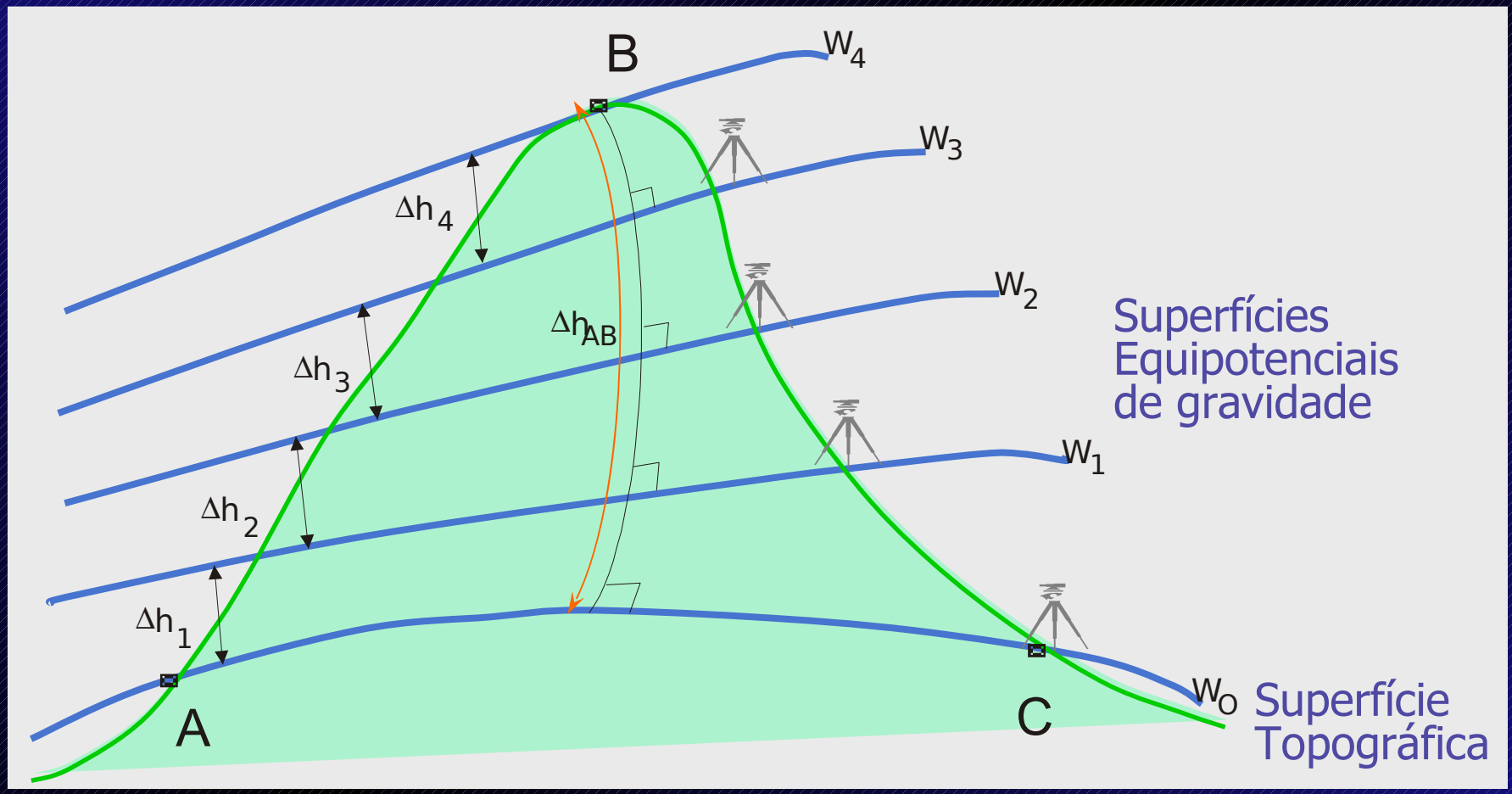
- Na operação de nivelamento, quando se estaciona o nível e se faz leituras das miras, a diferença de leitura traduz a separação entre as duas superfícies de nível que passam pela base das duas miras. Considerando um lance (distância entre duas miras) ou uma sessão (distância entre duas RRNN) aquela separação é constante.

- Porém, no geral, como as superfícies de nível não são paralelas, a separação entre elas não será constante. Portanto, o nivelamento geométrico dependerá do trajeto percorrido.

Nivelamento Geométrico



Nivelamento geométrico



Dh_i (i=1,...,4) → desníveis obtidos pelo nivelamento geométrico entre pontos que situam-se na intersecção da superfície topográfica com as superfícies equipotenciais W_i (i=0,...,4).

Nivelamento geométrico

$\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 \neq \Delta h_{AB}$

- Na verdade, o que duas superfícies de nível têm de constante é a diferença de potencial e não a separação entre elas. Para se equacionar o problema do nivelamento geométrico é necessário dar sentido físico à altitude. Isto é feito definindo uma grandeza física chamada número geopotencial (C_{AB}):

$$W_B - W_A = C_{AB} = \int_A^B g\,dh$$

Nivelamento geométrico

- No caso discreto, mais comum no nivelamento em que a sessão é constituída de lances, tem-se:

$$C_{AB} = \sum_{i=1}^{n} g_i \Delta h_i$$

O número geopotencial tem sentido físico. Ou seja, é uma grandeza que é respeitada pela água, por exemplo. Entretanto, não é conveniente ou usual trabalhar com números geopotenciais. Normalmente trabalha-se com a altitude. Dividindo-se o número geopotencial por um dado valor da aceleração da gravidade tem-se uma determinada altitude.

$$H = \frac{C_{AB}}{g}$$

Sistema de altitude

- Se o valor de g escolhido for a gravidade média entre a superfície física e a geoidal (g_m), tem-se a altitude ortométrica.

$$H = \frac{C_{AB}}{g_m}$$

- Na prática calcular esta média é impossível pois exige o conhecimento de um modelo de distribuição de densidades no interior da crosta. Optando-se pela aceleração média da gravidade para a Terra normal (γ_m) determina-se a altitude normal.

$$H^N = \frac{C_{AB}}{\gamma_m}$$